LEYES DE EXPONENTES

DEFINICIÓN 1 (EXPONENTE CERO)

$$a^0 = 1$$

$\forall\ a \in R - \{0\}$

DEFINICIÓN 2 (EXPONENTE NATURAL)

$$a^n = \begin{cases} a & \text{Si } n = 1 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}; & \text{Si } n \geq 2 \end{cases}$$

$\forall\ a \in R$ y $n \in Z^+$

DEFINICIÓN 3(EXPONENTE NEGATIVO)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Si $a \in \mathbb{R}$ -{0} y $n \in Z^+$

DEFINICIÓN 4 (EXPONENTE FRACCIONARIO)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m$$

Si $a \in R^{+¿¿}$, $m \in R$ ^ $n \in Z^{+¿¿}$

I. RADICACIÓN

$$\sqrt[n]{a} = \underbrace{r}_{\text{radicando}} \quad \overbrace{n}^{\text{índice}} \quad \underbrace{\sqrt{\ }}_{\text{raíz}}$$

DEFINICIONES

1. $\forall\ a, b \in \mathbf{R}$ ^ $n \in Z^+$

$$\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow a = r^n$$

2. $\forall\ a \in \mathbf{R}$ ^ $n \in Z^+$

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a & ; n = 1 \\ a^{\frac{1}{n}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

3. Si m/n ∈ Q con n positivo y $a \in \mathbf{R}^+$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

TEOREMAS

BASES IGUALES:

Producto:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$ m, n ∈ N ^ a ∈ R

División:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$ m, n ∈ N ^ a∈ R -{0}

POTENCIAS:

Potencia de un producto:

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$ n ∈ N ^ a ∈ R

Potencia de un Cociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$ m, n ∈ N ^ a∈ R ^ b∈ R -{0}

Potencia de Potencia:

$$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{nm} \quad m, n \in N \wedge a \in R$$

RADICALES:

Teorema Fundamental:

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \quad m, n, p \in Z^+ \wedge a \in R^+$$

Raíz de un Producto:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \quad n \in Z^+ \wedge a, b \in R^+$$

Raíz de un Cociente:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad n \in Z^+ \wedge a, b \in R^+$$

Raíz de Raíz:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad m, n \in Z^+ \wedge a \in R^+$$

Teorema Adicional:

$$\sqrt[n]{a.\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{a^m}.\sqrt[mn]{b} \quad m, n \in Z^+ \wedge a, b \in R^+$$

CASOS ESPECIALES:

i) $$\sqrt[n]{a^{\alpha}\sqrt[m]{a^{\beta}\sqrt[p]{a^{\gamma}}}} = a^{\frac{(\alpha m+\beta)p+\gamma}{nmp}}$$

ii) $$a^{m^{n^p}} = \text{?} \; a^{\square}$$

iii)

$$\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x....\sqrt[n]{x}}}} = \sqrt[n^k]{x^{\frac{n^k-1}{n-1}}}; \quad n,k \in N/n \geq 2$$

("k" veces)

iv)

$$\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div ..... \div \sqrt[n]{x}}}} = \begin{cases} \sqrt[n^k]{x^{\frac{n^k-1}{n-1}}}; & \text{cuando k es par} \\ \sqrt[n^k]{x^{\frac{n^k+1}{n+1}}}; & \text{cuando k es impar} \end{cases}; \; n,k \in N/n \geq 2$$

("k" veces)

v)

$$\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x....\infty}}} = \sqrt[n-1]{x}; \quad x \in R, \wedge \; n, \in N/n \geq 2$$

vi)

$$\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div ....\infty}}} = \sqrt[n+1]{x}; \quad x \in R, \wedge \; n, \in N/n \geq 2$$

II. ECUACIONES EXPONENCIALES – TRASCENDENTES

DEFINICION

Son aquellas ecuaciones no algebraicas, como por ejemplo:

A) BASES IGUALES:

Si: $x^n = x^m \rightarrow n = m$; $x > 0 \wedge x \neq 1$

B) EXPONENTES IGUALES:

Si:

$$x^n = y^n \rightarrow x = y$$

Observación:

$$x \neq y \rightarrow n = 0$$

C) FORMAS ANÁLOGAS:

Lo que se busca es que en ambos miembros aparezcan expresiones que tienen la misma forma o estructura.

Así:

$$\mathbf{M^M = N^N \rightarrow M = N}$$

D) CASOS ESPECIALES:

$x^{x^a} = a \Rightarrow x = \sqrt[a]{a}$

$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = a \Rightarrow x = \sqrt[a]{a}$

OBSERVACIONES:

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$

$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$

Valor absoluto: $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$

EJERCICIOS DE CLASE

1. Simplificar:

$$T = \frac{a^2 \times a^4 \times \cdots \times a^{2n-2} \times a^{2n}}{a^{2n-1} \times a^{2n-3} \times \cdots \times a^3 \times a}$$

Indique el exponente de **a**.

A) n B) n + 1 C) 2n + 1

D) 2n E) 2n - 1

2. Simplificar:

$$E = \frac{3^{n-1} + 3^n + 3^{n+1}}{3^{n-4} + 3^{n-3} + 3^{n-2}}$$

A) 3 B) 3^{-3} C) 3^3

D) 3^{-5} E) 3^5

3. Calcule el exponente final de x^2 luego de simplificar la expresión M.

$$M = \frac{\left((x^2)^{(-2)^2}\right)^5 . (x^2)^{-2^4} . x^{-(-3)^3} . (x^2)^4 . x^{2020^{2019^0}}}{x^{2^{3^0}} . x^{(-1)^{2^{2020}}} . x^{3^3} . x^{2019^{2020^0}}}$$

A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 14

4. Simplificar:

$$E = \sqrt[a^{b^c} - b]{a^{b+ab} . a^{-2ab} . a^{a^{b^c+1}} . a^{-a^{b^c}}}$$

A) a^a B) a^{-1} C) a^{a-1}

D) a^{a+1} E) –a

5. Determinar el resultado de simplificar:

$$Z = \sqrt[a^{a+1}]{a^{a^{a+2}}} . \sqrt[a^{a+2}]{a^{a^{a+3}}}$$

A) a^2 B) a^4 C) a^{2a}

D) a^4 E) a

6. Si: $x^{x^x} = \sqrt{2}$, calcular:

$$M = \left(x^{\sqrt{2}}\right)^{x^{x+x^x}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4

D) $2\sqrt{2}$ E) 8

7. Si

$$x^{x^{x^x}} = 2 .$$

Calcular

$$S = 2x^{x^{x^x + x^{x^x} + x^{x^x}}}$$

A) 4 B) 8 C) 16

D) 32 E) 64

8. Reduzca:

$$M = \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^{-n}} + \sqrt[n]{24^n + 4^n}}{\sqrt[n]{6^n + 1}}$$

$n \in N - \{1\}$

A) $\frac{13}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

9. Simplificar:

$$T=\left[\frac{36(6)^{n^2}+81(9)^{n^2}}{4(2)^{n^2}+9(3)^{n^2}}\right]^{\left(\frac{n^2}{2}+1\right)^{-1}}$$

A) 3 B) 9 C) 27

D) 81 E) $\sqrt{3}$

10. Calcular:

$$T=\sqrt[n-1]{\frac{2^{n-1}+3^{n-1}+4^{n-1}}{6^{1-n}+8^{1-n}+12^{1-n}}}$$

A) 6 B) 8 C) 12

D) 24 E) 36

11. Simplificar:

$$P=3^{S}$$

Si

$$S=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt[12]{3}}\right)^{3^{-1}}$$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt[3]{3}$

D) 3 E) $\sqrt{3}$

12. El valor de “x”, en:

$$x=\sqrt{\frac{2x^2+1}{2+\sqrt{\frac{2x^2+1}{2+\sqrt{\frac{2x^2+1}{2+\ddots}}}}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

13. El equivalente de S, sabiendo que:

$$S=\sqrt[3]{x}.\sqrt[15]{x}.\sqrt[35]{x}.\ \ldots\ .\sqrt[399]{x}$$

A) $\sqrt[21]{x}$ B) $\sqrt[12]{x}$ C) $\sqrt[21]{x^{10}}$

D) $\sqrt[21]{x^{19}}$ E) $\sqrt[6]{x^{5}}$

14. Si

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$$

Calcular

$$S = 1 + \frac{x}{5}+\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{x}{5}\right)^3+\ldots$$

A) 2 B) 5 C) 5/2

D) 25/4 E) 2/5

15. En la ecuación:

$$\sqrt{(0,1)^{-m}\sqrt{(0,01)^{-2m}\sqrt{0,001}}}=10$$

El valor de m es:

A) $\frac{11}{12}$ B) $-\frac{11}{15}$ C) $\frac{11}{8}$

D) $\frac{12}{11}$ E) $-\frac{11}{12}$

16. Resolver:

$$x^{x^{20}}=\sqrt[3]{5}^{\sqrt[3]{5}}$$

A) $\sqrt[15]{5}$ B) $\sqrt[5]{15}$ C) $\sqrt[5]{5}$

D) $\sqrt[15]{15}$ E) 5

17. Resuelve:
$25^x+4^x = 2(10^x)$

Halla "x"

A) 0 B) 1 C) 2

D) –2 E) -1

18. Resolver:

$$x^{2+x^{2+x^{2+x^{2+\cdots}}}} = \sqrt[3]{x^8\ \sqrt[3]{x^8\ \sqrt[3]{x^8\ldots\ldots\infty \text{rad}}}}$$

A) $\sqrt[5]{4}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{8}$

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt[4]{2}$

19. Si

$$x^{x-\sqrt{x}+1} = x\left(\sqrt{x}+1\right)$$

Calcule el valor de:

$$P = \frac{x^2+1}{x}$$

A) 2 B) $-\sqrt{2}$ C) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

D) $-2\sqrt{2}$ E) 3

20. Dada la ecuación:

$$x^{x^{\sqrt[4]{x}+0,25}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}^{1-2\sqrt{2}}}$$

El valor de:

$$J = {}^{4x+3}\sqrt{x^8}$$

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) 8

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

21. Reducir:

$$T = \left[2^{\sqrt{2}}.\sqrt{2}^{\sqrt{2}}.2^{2^{-2^{-1}}}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

A) 2 B) 4 C) 8

D) 16 E) 64

22. Si

$$T = \sqrt[5]{\frac{5^{x+1}+5^{x+2}+5^{x+3}+5^{x+4}}{5^{x-1}+5^{x-2}+5^{x-3}+5^{x-4}}}$$

El valor obtenido es:

A) 5 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

23. Calcular el valor de T:

$$T = \sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\ldots\infty}}}$$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 1 E) 16

24. Si: $n+\frac{1}{n}=3$

Hallar el valor de:

$$W = \left[n^n+\left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\left[n^{\left(\frac{1}{n}\right)}+\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

A) 18 B) 21 C) 15

D) 20 E) 24

25. Calcular "n" si:

$$4^{n+\frac{1}{2}} - 3^{n-\frac{1}{2}} = 3^{n+\frac{1}{2}}$$

A) -1 B) -1/2 C) 0

D) 1 E) 1/2

26. Indicar el valor de “x” en:

$(nx)^x = n^{n^n}$

A) n^{n+1} B) n^{n-1}

C) n^{2n}

D) n^{n-2} E) n^n

27. Si

$x^x = 6$

Reducir

$$M = \frac{\left[x^{x^x} + x^{-(-x)^x}\right] x^{-x^6}}{x^{-2x^6+3} + x^3}$$

A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{x^2}$ C) x

D) $\frac{1}{x^{-3}}$ E) $\frac{1}{x^3}$

28. Si

$(x+1)x^x = (2x+1)\sqrt[x]{x}$; $x \neq 0$

Calcular el valor de

$$T = \frac{x^2-1}{x} + x^{2-x} + 1$$

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) 0 C) 2

D) 3 E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

29. Simplificar la expresión:

$$E = \sqrt[n]{\frac{243^{n+1}\sqrt[n-1]{27^{(n-1)^2}}}{9^{n+1}\sqrt[n]{3^{-1}}}}$$

A) 7^3

B) 3^7

C) 3^2

D) 7^4

E) 3^5

30. Resolver: $27^{9^{3+x}} = \sqrt[3]{3}$

a) -3 b) -4 c) 3

d) 4 e) ¼

31. Señale el producto de:

$$\left\{\frac{5x^{n+5}}{\underbrace{x.x.x...x}_{(n+1)\text{-veces}}}\right\}\left\{\frac{\overbrace{\sqrt{x}.\sqrt{x}...\sqrt{x}}^{(6n-4)\text{-veces}}}{2x^{n-1}}\right\}^3\left\{\frac{4x^{12n+1}}{\underbrace{x^3.x^3...x^3}_{(5n-1)\text{-veces}}}\right\}^2$$

a) x^9 b) $10x^9$ c) $5x$

d) $2x$ e) 10

32. Hallar el valor de "x" en:

$2^{8^{x-2}} = 4^{4^{x+1}}$

a) 2 b) 4 c) 3

d) 6 e) 9

33. La simplificación de:

$$E = \sqrt{64^{\sqrt[n+1]{64^{-3}}\sqrt[3]{64^{7-2n}}}}$$

a) 8 b) 6 c) 4

d) 2 e) 1

34. Hallar el valor de: $a^2 + b^2$ en:

$$a-b\sqrt{\frac{b\sqrt{a^ab}}{a\sqrt{a^bb}}} = 3^{\frac{4}{3}}$$

a) 13 b) 18 c) 14
d) 15 e) 10

35. Luego de resolver la ecuación exponencial:

$$x^{x^{0,5}} = \sqrt{0,5}$$

el valor de "x" toma la forma 4^n donde "n" es igual a:

a) -4 b) -7 c) -10
d) -12 e) -16

36. Reducir:

$$A = \sqrt[n]{\frac{(xy)^n + (yz)^n + (zx)^n}{x^{-n} + y^{-n} + z^{-n}}} \cdot \frac{x^{-1}z^{-1}}{y}$$

$$\forall n \in N - \{1\} \; ; \; xyz \neq 0$$

a) 1 b) 0 c) x
d) $x^n y^n z^n$ e) xyz

37. Si: $x = ab$, resolver:

$$\frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{x^n + b^{2n}}{a^{-2n}x^n + 1}}$$

a) 1 b) $\frac{a}{b}$ c) 2ab
d) $3\frac{b}{a}$ e) $\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)$

38. Reducir:

$$\frac{\left(x^5\right)^{x^{-x}} + x^{x+x^x}}{x\left(x^{x+4} + 1\right)}$$

, si $x^x = 5$

a) 1 b) x c) x+1
d) x^2 e) x^5

TAREA DOMICILIARIA

1. Si $a^{a^a} = 2$, el valor de $E = a^{2a^{2a^a+a}}$ es:

a) 256 b) 128 c) 64
d) 32 e) 16

2. Calcular "m" si: $(0,5)^{-3^{2^{-1}}} = (0,125)^{-m^{-7}}$

a) $\sqrt[14]{27}$ b) $\sqrt[7]{9}$ c) $3\sqrt[7]{3}$
d) $2\sqrt[3]{3}$ e) $\sqrt[14]{3}$

3. Al simplificar:

$$\left[\frac{\frac{x^{2/3}\, y^{-1/2}}{yx^{-1}}}{\left(\frac{xy^{-2}}{yx^{-1}}\right)^{1/2}}\right]^3$$

Se obtiene:

a) x b) 2x c) x/2
d) x^2 e) 1/x

4. El exponente final de "x" al simplificar:

$$\sqrt[x]{\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x^{x+1}}}}$$

, es:

a) $\sqrt{x}$ b) 1
c) x
d) x^2 e) x + 1

5. Hallar la relación entre “m” y “n” , si se cumple que:

$$\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{m-n}}{\left(\frac{n}{m}\right)^{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{m-n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{m}{n}}\right)^{m}$$

a) m = n b) 2m = n
c) $2n = \sqrt{m}$ d) m + n = 2
e) mn = 1

39. Simplificar:

$$E = \frac{\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{4\ldots}}}}{\sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt[3]{16}}}}}}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5